

1. VELOCIDAD DE ESCAPE.

Se denomina velocidad de escape v_e de un planeta de masa M y radio R a la mínima velocidad con que debe lanzarse un cuerpo desde la superficie del planeta para que escape de su campo gravitatorio.

Si lanzamos un cuerpo de masa m con la velocidad de escape desde un punto A de la superficie, alcanza un punto B donde:

- $E_{pB} = 0$ porque ha salido del campo gravitatorio de M .
- $E_{cB} = 0$ porque se ha lanzado con la velocidad **mínima** necesaria.

Aplicamos la conservación de la energía mecánica porque la fuerza gravitatoria es conservativa:

$$E_{mA} = E_{cA} + E_{pA} = \frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{M_T \cdot m}{R} \quad E_{mB} = E_{cB} + E_{pB} = 0 + 0 = 0$$

$$E_{mA} = E_{mB} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 - G \frac{M_T \cdot m}{R_T} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} v_e^2 = G \frac{M_T}{R_T} \Rightarrow v_e^2 = \frac{2GM}{R} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

2. VELOCIDAD ORBITAL.

Suponemos que los satélites giran en órbitas circulares. Sea M la masa del planeta, m la masa del satélite y r el radio de la órbita.

La 2ª Ley de Newton establece que la fuerza gravitatoria es la fuerza centrípeta responsable del movimiento circular:

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Sustituimos esta expresión en la fórmula de la energía cinética:

$$\text{Energía cinética del satélite: } E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{2r}$$

$$\text{Energía potencial del satélite: } E_p = - \frac{GMm}{r}$$

$$\text{Energía mecánica del satélite: } E_{orb} = E_c + E_p = \frac{G \cdot M \cdot m}{2r} - \frac{GMm}{r} = - \frac{GMm}{2r}$$

3. TERCERA LEY DE KEPLER

Kepler descubrió que al elevar al cuadrado el periodo T de la órbita de cada planeta del Sistema Solar y dividir el resultado por el cubo de su radio orbital medio r , se obtenía siempre el mismo número k :

$$\frac{T^2}{r^3} = k$$

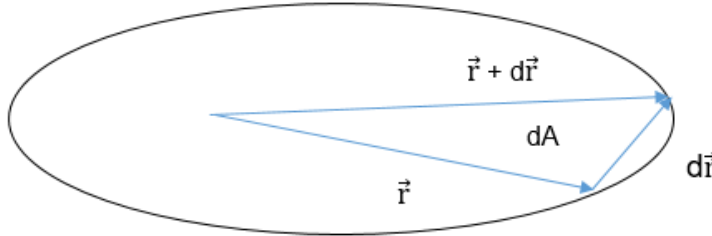
Igualando la expresión obtenida para la velocidad orbital, $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$, a la velocidad de un movimiento circular uniforme de radio r y periodo T , $v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$, se obtiene una expresión en la que se puede calcular la constante k de la 3ª Ley de Kepler:

$$\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$$

4. SEGUNDA LEY DE KEPLER.

La segunda ley de Kepler afirma que el vector de posición de un planeta respecto al Sol barre áreas iguales en tiempos iguales (la velocidad areolar, $\frac{dA}{dt}$, es constante).

Para comprobar que $\frac{dA}{dt}$ es constante hallamos el área diferencial dA barrida cuando el vector de posición $\vec{r}$ avanza $d\vec{r}$.



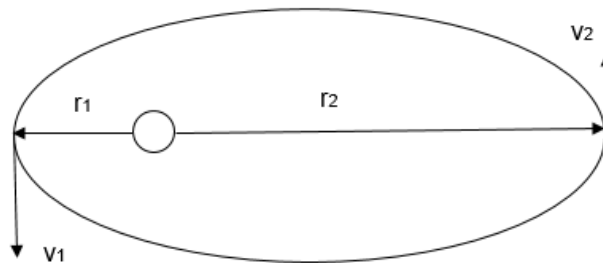
El área del paralelogramo formado por dos vectores coincide con el módulo de su producto vectorial. El área del triángulo de la figura es entonces:

$$dA = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times d\vec{r}| \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \cdot r \cdot v \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2 \cdot m}$$

Donde hemos tenido en cuenta que:

- $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$
- $L = m \cdot r \cdot v$

Se comprueba que la velocidad areolar es constante porque L y m son cantidades constantes. Como consecuencia, la velocidad del planeta es mayor cuanto menor es su distancia al Sol:



$$L_1 = L_2 \rightarrow m r_1 v_1 = m r_2 v_2 \rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

CUESTIÓN:

El perihelio (P) y el afelio (A) son los puntos de la órbita elíptica de la Tierra que se encuentran más cerca y más lejos del Sol, respectivamente, siendo r_1 y r_2 las distancias de la Tierra al Sol en P y en A. Encuentra razonadamente la relación que existe entre las velocidades orbitales de la Tierra en P y en A, y justifica en cuál de los dos puntos se desplaza la Tierra más rápidamente.

Principio de conservación del momento angular

$$\vec{L}_P = \vec{L}_A \Rightarrow \vec{r}_1 \times m \cdot \vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m \cdot \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{v}_2 \Rightarrow r_1 v_1 \sin 90^\circ = r_2 v_2 \sin 90^\circ \Rightarrow r_1 \cdot v_1 = r_2 \cdot v_2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

$$r_2 > r_1 \Rightarrow v_1 > v_2$$